Μαθημα 11ο — 5/4/2017

Τοπολογια

Ασκηση 1

Δινεται $E \neq \emptyset$ εφοδιασμενο με δυο μετρικες ρ_1, ρ_2

(E,ρ_1), (E,ρ_2) } με την εξης ιδιοτητα

$\forall\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθια ρ_1-συγκλινουσα (Υ)

$\Rightarrow$ η (a_n) ειναι και ρ_2-συγκλινουσα

Λυση

Θελουμε νδο αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ ειναι τ.ω $a_n \xrightarrow{\rho_1} l \Rightarrow a_n \xrightarrow{\rho_2} l$

Ξεκιναμε με $a_n \xrightarrow{\rho_1} l$

Κατασκευαζω $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ με τον εξης τροπο

$$\begin{cases} \sigma_{2n} = a_n \\ \sigma_{2n+1} = l \end{cases}$$

Δηλ. $\sigma_{2n} \xrightarrow{\rho_1} l$ και $\sigma_{2n+1} = l \xrightarrow{\rho_1} l$ αρα εχουμε οτι

$\sigma_n \xrightarrow{\rho_1} l \overset{(Y)}{\Longrightarrow} \exists\ l' \in E$ ωστε $\sigma_n \xrightarrow{\rho_2} l'$

(Υ) $\Rightarrow \sigma_n$ ρ_1-συγκλινουσα $\overset{(Y)}{\Longrightarrow} \sigma_n$ ρ_2-συγκλινουσα $\Rightarrow \exists\ l' \in E$ με

$\sigma_n \xrightarrow{\rho_2} l' \Rightarrow \sigma_{2n+1} \to l'$ } μοναδικοτητα οριου, αρα

$\sigma_{2n+1} \to l$ $\quad l = l'$

Θελαμε νδο $a_n \xrightarrow{\rho_1} l \Rightarrow a_n \xrightarrow{\rho_2} l$

$\sigma_n \xrightarrow{\rho_2} l \Rightarrow \underbrace{\sigma_{2n}}_{=a_n} \xrightarrow{\rho_2} l$ συνεπως $a_n \xrightarrow{\rho_2} l$

Ορισμος: Εστω (E,ρ) μ.χ και $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθια στο E. Η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θα λεγεται βασικη (cauchy) ($(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall\ n,m \geq n_0 : \rho(a_n, a_m) < \varepsilon$

Παρατηρηση

$a_n \xrightarrow{\rho} \ell \overset{①}{\Rightarrow} (a_n)_n$ βασικη για καποιο $\ell \in E$

το αντιστροφο δεν ισχυει

αποδειξη

Εστω $\varepsilon > 0$. $① \Rightarrow \exists n_0(\varepsilon) = n_0 : \forall n \geq n_0 : \overbrace{\rho(a_n, \ell) < \varepsilon/2}^{②}$

$\rho(a_n, a_m) \leq \rho(a_n, \ell) + \rho(a_m, \ell) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad , n, m \geq n_0$

⊕ Βρειτε μια $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ σε εναν μ.χ (E, ρ) η οποια να ειναι βασικη, οχι ομως συγκλινουσα στο E $((a_n) \subseteq (E, \rho))$

$a_n = \frac{1}{n} > 0$ με $\frac{1}{n} \xrightarrow{(|\cdot|, \mathbb{R})} 0$

$E = (0, 3]$, $(E, |\cdot|)$

↳ ειναι συγκλινουσα εκει?

οχι, δεν συγκλινει στο E

Ειναι βασικη στο E?

Ειναι βασικη η (a_n) στο $\mathbb{R}$? Ειναι βασικη στο $\mathbb{R}$

αυτο σημαινει οτι $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : |a_n - a_m|_{\mathbb{R}} < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$

Ειναι ακριβως το ιδιο και στο χωρο E αφου

$a_n, a_m \in E$, συνεπως ειναι βασικη και στο E

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon \ , \forall n, m \geq n_0 \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ βασικη στο E

Πρόταση

Στον (E,ρ) δίνεται $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική (1) τ.ω $\exists\, a_{k_n} \to \ell$ (2) για κάποιο $\ell \in E \Rightarrow a_n \to \ell$

πάει στο ∞ αφού γν. αύξουσα

απόδειξη

(1) Έστω $\varepsilon>0 \Rightarrow \exists\, n_0(\varepsilon)=n_0 \in \mathbb{N} : \forall n,m \geq n_0 : \rho(a_n,a_m)<\varepsilon/2$

(2) $\exists\, n_1(\varepsilon)=n_1 : \forall n\geq n_1 : \rho(a_{k_n},\ell)<\varepsilon$

Υποθέσεις

Θέλουμε να βρούμε $n_2 \in \mathbb{N} : \rho(a_n,\ell)<\varepsilon,\ \forall n\geq n_2$

$\rho(a_n,\ell) \leq \rho(a_n,a_{k_n})+\rho(a_{k_n},\ell)$

$\rho(a_n,a_{k_n})<\varepsilon/2 \quad \forall n, k_n \geq n_0$

επιπλέον $k_n \geq n \geq n_0$

άρα $\rho(a_n,\ell) \leq \rho(a_n,a_{k_n})+\rho(a_{k_n},\ell) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

- $\rho(a_{k_n},\ell)<\varepsilon/2$ γιατί $n\geq n_1$ και βάζω $n_2=\max\{n_1,n_0\}$

Άσκηση / Πρόταση

Δίνεται $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική στον (E,ρ). Δείξε ότι είναι φραγμένη

Λύση / απόδειξη

$A=\{a_n : n\in\mathbb{N}\} \subseteq E$

$\delta(A)<\infty \iff \exists\, M>0\ \forall x,y \in A : \rho(x,y)\leq M$

$\iff \exists\, M>0 : \rho(a_n,a_m)\leq M,\ \forall n,m \in\mathbb{N}$

$(a_n)_n$ βασική $\Rightarrow \varepsilon=1$

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \rho(a_n,a_m)\leq 1\ \forall n,m\geq n_0$

Έχουμε 3 περιπτώσεις

i) αν $n,m \geq n_0 \Rightarrow \rho(a_n,a_m)\leq 1$

ii) αν $n,m<n_0 \Rightarrow \rho(a_n,a_m)\leq k$

$n=1,2,\dots,n_0-1$, $m=1,2,\dots,n_0-1$

$k=\max\{\rho(a_n,a_m) : n,m\leq n_0\}$

iii) $n < n_0$, $m \geq n_0$ { Δεν είναι εύκολο, δεν είναι δύσκολο }

$\rho(a_n, a_m) \leq \underbrace{\rho(a_n, a_{n_0})}_{<K} + \underbrace{\rho(a_{n_0}, a_m)}_{<1} \leq K+1$

Διαλέγοντας $M = 1+K$ προκύπτει το ζητούμενο

Πρόταση / Άσκηση

$(E_1, \rho_1), \ldots, (E_k, \rho_k)$ μ.χ και $E = E_1 \times \ldots \times E_k$, (E, ρ) καρτεσιανός μετρικός χώρος.

$(\bar{a}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ με $\bar{a}_n = (a_{n,1}, \ldots, a_{n,k})$

$a_{n,i} \in E_i$ $\forall i = 1, \ldots, k$

i) $\bar{a}_n$ βασική στο $E \iff \forall i : (a_{n,i})$ η βασική στο E_i

ii) $\bar{a}_n$ φραγμένη στο $E \iff \forall i = 1, \ldots, k$ $(a_{n,i})_{n \in \mathbb{N}}$ φραγμένη στο E

i) $(\Leftarrow)$ $\bar{a}_1 = (a_{1,1}, \ldots, a_{1,k})$

$\bar{a}_2 = (a_{2,1}, \ldots, a_{2,k})$

$\vdots$

$\bar{a}_n = (a_{n,1}, \ldots, a_{n,k})$

$1 \leq i \leq k$: $(a_{n,i})_{n \in \mathbb{N}}$ βασική στο (E_i, ρ_i)

αν $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, n_i(\varepsilon) = n_i : \forall n, m \geq n_i$ $\rho_i(a_{n,i}, a_{m,i}) < \varepsilon$

$n_0 = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$

$n, m \geq n_0$: $\rho(\bar{a}_n, \bar{a}_m)$

! $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_k)$, $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ { θυμάμαι!

$\rho(\bar{x}, \bar{y}) \leq \sum_{i=1}^{k} \rho_i(x_i, y_i)$

οπότε $\rho(\bar{a}_n, \bar{a}_m) \leq \sum_{i=1}^{k} \rho_i(a_{n,i}, a_{m,i}) \leq \frac{\varepsilon}{k} \cdot k = \varepsilon$

($\Rightarrow$) $\bar{a}_n$ βασική στο $\bar{E}$

Εχουμε δηλ. $\rho(\bar{a}_n, \bar{a}_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0 \quad \overset{;}{\Rightarrow} \rho_i(a_{n,i}, a_{m,i}) < \varepsilon$

Επισης $\rho_i(a_{n,i}, a_{m,i}) \leq \rho(\bar{a}_n, \bar{a}_m)$

$$\rho_i(x_i, y_i) \leq \rho(\bar{x}, \bar{y}) \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in \bar{E}$$

Ασκηση

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθια στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ τοτε $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμενη

$\Leftrightarrow \exists k > 0 : |a_n| \leq k'$ (αυτο σημαινει οτι $a_n \in B(0, k')$ $(\mathbb{R}, |\cdot|)$)

το κεντρο το παιρνω εγω

Λυση

($\Rightarrow$) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμενη $\Rightarrow \exists k > 0 : \rho(a_n, a_m) \leq k \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$

$|a_n - a_m| \leq k \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$

Διαλεγω $m = 1$ και n το σταθεροποιω

$\forall n \in \mathbb{N} : |a_n - a_1| \leq k \Rightarrow |a_n - a_1| \leq |a_n| - |a_1| \leq |a_1| + k = k'$

$$! \ |a_n - a_1| \leq |a_n| - |a_1|$$

τρ. ανισ

($\Leftarrow$) $|a_n - a_m| \leq |a_n| + |a_m| \leq k + k = 2k$

φανερο

Ασκηση πιο ενδιαφερον, πιο ευκολη, πιο τροφοδοτικη

Στον (E, ρ) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασικη $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \delta(\{a_k : k \geq n\}) = 0$

Λυση

$$a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \overbrace{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots}^{A_n}$$

$A_n = \{a_k : k \geq n\} \subseteq E$

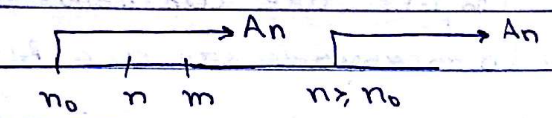
$\lim_{n\to\infty} \delta(\{a_k : k \geq n\}) = 0 \Leftrightarrow \delta(A_n) \to 0$

(⇒) αν $\varepsilon > 0$ τοτε θελω νδο $\underbrace{\lim_{n\to\infty} \delta(A_n)}_{\text{ακολουθια θετικων πραγμ.}} = 0$

$\varepsilon > 0$: $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: $0 \le \delta(A_n) < \varepsilon$, $\forall\, n \ge n_0$ → Στοχος ← (1)

Σταθ $\varepsilon > 0$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασικη $\Rightarrow \exists\, n_0(\varepsilon)$: $\rho(a_n, a_m) < \varepsilon$ $\forall\, n, m \ge n_0$

$\Rightarrow \delta(A_{n_0}) < \varepsilon$ θελω να ισχυει και $\forall\, n \ge n_0$



Ομως $\forall\, n \ge n_0$: $A_n \subseteq A_{n_0} \Rightarrow \delta(A_n) \le \delta(A_{n_0}) < \varepsilon$ $\forall\, n \ge n_0$

δηλ. φτασαμε στον στοχο μας $\Rightarrow$ (1)

(⇐) $\lim_{n\to\infty} \delta(\{a_k : k \ge n\}) = 0$ δωστε μου το

Ασκηση να το κανω

φανερο!